

1	2	3	4	Σ

Vpisna številka							

Ime in priimek

Naloga 1 [10 točk]

V premični piki želimo izračunati vrednost polinoma v temenski obliki brez prostega člena,

$$y = a(x - p)^2,$$

kjer so a, p, x dana predstavljiva števila. Opravite analizo zaokrožitvenih napak in preverite, da je izračun za y relativno direktno stabilen.

Rešitev. Vmesni koraki algoritma:

$$v_1 = \text{fl}(x - p) = (x - p)(1 + \delta_1),$$

$$v_2 = \text{fl}(v_1^2) = v_1^2(1 + \delta_2),$$

$$v_3 = \text{fl}(av_2) = av_2(1 + \delta_3)$$

kjer velja $|\delta_i| \leq u$ za $i = 1, 2, 3$.

Poenostavimo v_3 :

$$\begin{aligned} v_3 &= a(x - p)^2(1 + \delta_1)^2(1 + \delta_2)(1 + \delta_3) \\ &= a(x - p)^2(1 + \delta_4), \end{aligned}$$

kjer smo vpeljali δ_4 , da velja $|\delta_4| \leq 4u$ (višje člene oblike u^2 pa zanemarili).

Relativna napaka:

$$\frac{|D - \text{fl}(D)|}{|D|} = \frac{|a(x - p)^2\delta_4|}{|a(x - p)^2|} = |\delta_4| \leq 4u.$$

Ker smo relativno napako omejili z večkratnikom u , je postopek relativno direktno stabilen.

Naloga 2 [10 točk]

Naj bo

$$A = \begin{bmatrix} 0 & -4 & 4 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 4 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Preko LU razcepa z delnim pivotiranjem izračunajte rešitev linearnega sistema $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$.

Rešitev.

$$L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0.5 & -0.5 & 1 & 0 \\ 0.5 & 0 & 0.5 & 1 \end{bmatrix}, \quad U = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & -4 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}, \quad P = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$
$$P\mathbf{b} = \begin{bmatrix} 4 \\ 0 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad L\mathbf{y} = P\mathbf{b} \rightarrow \mathbf{y} = \begin{bmatrix} 4 \\ 0 \\ 0 \\ -2 \end{bmatrix}, \quad U\mathbf{x} = \mathbf{y} \rightarrow \mathbf{x} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Naloga 3 [10 točk]

Raziskovalni laboratorij spremlja količino energije $E(t)$ (v kWh), ki se med hitrim polnjenjem shrani v baterijo električnega vozila, v odvisnosti od časa t (v urah). Ob začetku polnjenja je v baterijo shranjenih 0 kWh energije, **hitrost** polnjenja pa znaša 40 kW. Po pol ure je v baterijo shranjenih 30 kWh energije, po eni uri pa 80 kWh.

Zapišite interpolacijski polinom v Newtonovi obliki, ki opisuje količino energije $E(t)$ v odvisnosti od časa t . Nato izračunajte $E(1.5)$ in ocenite količino energije v bateriji po uri in pol polnjenja.

Rešitev. za $t = 0, 0, 1/2, 1$, interpoliramo $E = 0, 40, 30, 80$ (drugi podatek je odvod), dobimo koeficiente: $c_i = 0, 40, 40, 0$

rešitev je polinom $p(t) = 40t + 40t^2$ in $p(1.5) = 150$ kW.

Naloga 4 [10 točk]

Na realni osi je podana funkcija

$$f(x) = e^x + x^2 - 3.$$

Pokažite, da ima f vsaj eno negativno in vsaj eno pozitivno ničlo, ter določite intervala, kjer se ničli nahajata. Eksplicitno zapišite tangentno metodo za iskanje ničle funkcije f . S pomočjo tangetne metode izračunajte pozitivno ničlo na vsaj 2 decimalni mesti natančno. Določite red konvergence tangentne metode v okolici te ničle.

Rešitev.

Izračunamo nekaj vrednosti funkcije f in zaradi spremembe predznaka funkcije f lahko sklepamo, da je ena ničla na intervalu $(-2, -1)$, druga pa na $(0, 1)$.

b) Tangentna metoda se glasi

$$x_{r+1} = x_r - \frac{e^{x_r} + x_r^2 - 3}{e^{x_r} + 2x_r}.$$

Dovolj je izvesti 2 koraka, dobimo

$$x_1 = 0.847766230468342,$$

$$x_2 = 0.833679203556307,$$

$$x_3 = 0.834547914186370.$$

Ker je $f'(x_3) = 3.696712752193650 \neq 0$, sklepamo, da je obravnavana ničla funkcije f enostavna in zato je red konvergence enak 2. Matematično bolj natančen sklep sledi iz dejstva, da je $f'(x) = e^x + 2x > 0$ za $x > 0$, torej je obravnavana ničla funkcije f res enostavna.