Algoritmi in podatkovne strukture 2

Algoritmi z rekurzivnim razcepom (»deli in vladaj«)

Luka Fürst

Deli in vladaj

- Metoda reševanja nekaterih problemov
- »Deli«: razdeli problem na medsebojno neodvisne podprobleme, ki imajo enako strukturo kot izhodiščni problem
- »Vladaj«: rekurzivno reši vsak podproblem posebej
- Združi rešitve posameznih podproblemov v rešitev izhodiščnega problema

Primer 1: urejanje z zlivanjem

- Deli: razdeli tabelo na dve enako veliki podtabeli
- Vladaj: rekurzivno uredi vsako podtabelo posebej
- Združi: zlij urejeni podtabeli

Primer 2: hitro urejanje (quicksort)

- Deli: izvedi porazdelitev glede na pivot
  - dobimo dve podtabeli, ki pa nista nujno enako veliki
- Vladaj: rekurzivno vsako podtabelo posebej
- Združi: tega dela nimamo!

Primer 3: dvojiško iskanje (v urejeni tabeli)

- Deli: razdeli tabelo na dve enako veliki podtabeli
- Vladaj: rekurzivno išči samo v eni podtabeli
- Združi: tega dela nimamo!

Časovna zahtevnost

- Recimo, da
  - problem velikosti n razdelimo na podprobleme velikosti n/b_1, n/b_2, ..., n/b_k
  - za razdelitev problema na podprobleme in združevanje rešitev podproblemov v rešitev izhodiščnega problema potrebujemo $D(n)$ časa
- Časovna zahtevnost algoritma je potem

$$T(n) = T(n/b_1) + T(n/b_2) + \ldots + T(n/b_k) + D(n)$$

Primer 1: Urejanje z zlivanjem

- tabelo razdelimo na 2 podtabeli
- vsaka je velika $n/2$
- $\Theta(n)$ časa za zlivanje

$$T(n) = 2T(n/2) + \Theta(n)$$

Primer 2: Hitro urejanje

- V najboljšem primeru
  - tabelo razdelimo na 2 podtabeli
  - vsaka je velika $n/2$
  - $\Theta(n)$ časa za porazdelitev
  - $T(n) = 2T(n/2) + \Theta(n)$
- V nekoliko slabšem primeru
  - recimo, da vsako (dovolj veliko) (pod)tabelo razdelimo vsaj v razmerju 1:9
  - $T(n) = T(n/10) + T(9n/10) + \Theta(n)$
- V najslabšem primeru
  - ena od podtabel vedno vsebuje samo po en element
  - $T(n) = T(1) + T(n-1) + \Theta(n) = T(n-1) + \Theta(n)$

Primer 3: Dvojiško iskanje

- Tabelo razdelimo na 2 podtabeli velikosti $n/2$
- Rekurzivno iščemo samo po eni podtabeli
- $\Theta(1)$ časa za razdelitev problema na podprobleme in združevanje rešitev podproblema v rešitev izhodiščnega problema

$$T(n) = T(n/2) + \Theta(1)$$

Reševanje rekurenčnih enačb

- Substitucijska metoda
  - uganemo rešitev
  - z indukcijo dokažemo, da je rešitev pravilna
- Drevesna metoda
  - »razvijemo« rekurenco (dobimo drevo)
  - ponavadi jo uporabljamo za tvorbo ocen časovne zahtevnosti, ki jih lahko potem preverimo s substitucijsko metodo
- Krovni izrek
  - direktna formula, a ima omejeno uporabnost

Substitucijska metoda

- Postavimo hipotezo
  - $T(n) \leq cf(n)$ za $n \geq n_0$, če dokazujemo $T(n) = O(f(n))$
  - $T(n) \geq cf(n)$ za $n \geq n_0$, če dokazujemo $T(n) = \Omega(f(n))$
- Hipotezo preverimo z indukcijo
  - predpostavimo, da trditev velja za vse $n' < n$
  - preverimo, ali velja tudi za n
- $\Theta(.)$ dokažemo tako, da dokažemo $O(.)$ in $\Omega(.)$

Substitucijska metoda: primer

- Rešimo enačbo $T(n) = 2T(n/2) + \Theta(n)$
- Zanima nas $f(n)$, za katerega velja $T(n) = O(f(n))$
- Trditev: $T(n) = O(n \log n)$
- Induktivna hipoteza: $T(n) \leq cn \log n$ za vse $n \geq n_0$
- Predpostavimo, da hipoteza velja za vse $n' < n$
  - torej velja tudi za $n' = n/2$
  - $T(n/2) \leq c(n/2) \log(n/2)$
- Preverimo, ali $T(n) \leq cn \log n$ velja tudi za n

Substitucijska metoda: primer

$$\begin{aligned} T(n) &= 2T(n/2) + \Theta(n) \\ &\leq 2c(n/2)\log(n/2) + \Theta(n) \\ &= cn\log n - cn + \Theta(n) \end{aligned}$$

- $\Theta(n)$ predstavlja funkcijo $kn + \ell$ za poljuben k in ℓ
- c in n_0 lahko poljubno izberemo
- Izberemo ju tako, da je $cn \geq kn + \ell$ za vsak $n \geq n_0$
- Trditev $T(n) = O(n \log n)$ smo dokazali

Substitucijska metoda: past

- $T(n) = T(n-1) + \Theta(n)$
- »Dokaz«, da je rešitev $T(n) = O(n)$:
  - $T(n) \leq O(n-1) + \Theta(n) = O(n)$
  - Napaka!
- Poskusiti moramo s $T(n) \leq cn$ (za $n \geq n_0$)
  - $T(n) \leq c(n-1) + \Theta(n)$
  - $T(n) \leq cn - c + \Theta(n)$
  - Kakorkoli izberemo c, bo $\Theta(n)$ prej ali slej prevladala nad c
  - Torej je $T(n) > cn$ za vse dovolj velike n
  - Trditev $T(n) = O(n)$ je potemtakem napačna
  - (Pravilna trditev je $T(n) = O(n^2)$)

Substitucijska metoda: trik

- $T(n) = 2T(n/2) + \Theta(1)$
- Trditev (pravilna!): $T(n) = O(n)$
- S hipotezo $T(n) \leq cn$ (za vse $n \geq n_0$) se dokaz ne izide

$$\begin{aligned} T(n) &= 2T(n/2) + \Theta(1) \\ &\leq 2cn/2 + \Theta(1) \\ &= cn + \Theta(1) \end{aligned}$$

- $\Theta(1)$ je nekaj pozitivnega, zato nam ni uspelo dokazati hipoteze $T(n) \leq cn$

Substitucijska metoda: trik

- Uspe pa nam s hipotezo $T(n) \leq cn - d$:

$$\begin{aligned} T(n) &= 2T(n/2) + \Theta(1) \\ &\leq 2(cn/2 - d) + \Theta(1) \\ &= cn - 2d + \Theta(1) \\ &= (cn - d) + (\Theta(1) - d) \\ &\leq cn - d \text{ za vse dovolj velike } d \end{aligned}$$

- $T(n) = O(n)$ je torej pravilna rešitev enačbe $T(n) = 2T(n/2) + \Theta(1)$

Drevesna metoda

- Včasih je težko uganiti rešitev rekurenčne enačbe
- Drevesna metoda nam pomaga najdi kandidatno funkcijo
- Kandidatno funkcijo preverimo s substitucijsko metodo

Drevesna metoda: primer

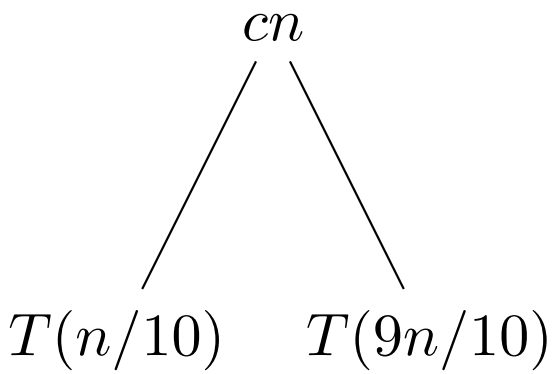
- $T(n) = T(n/10) + T(9n/10) + \Theta(n)$
- Enačbo zapišemo kot

$$T(n) = T(n/10) + T(9n/10) + cn$$

in jo vstavljamo »samo vase«

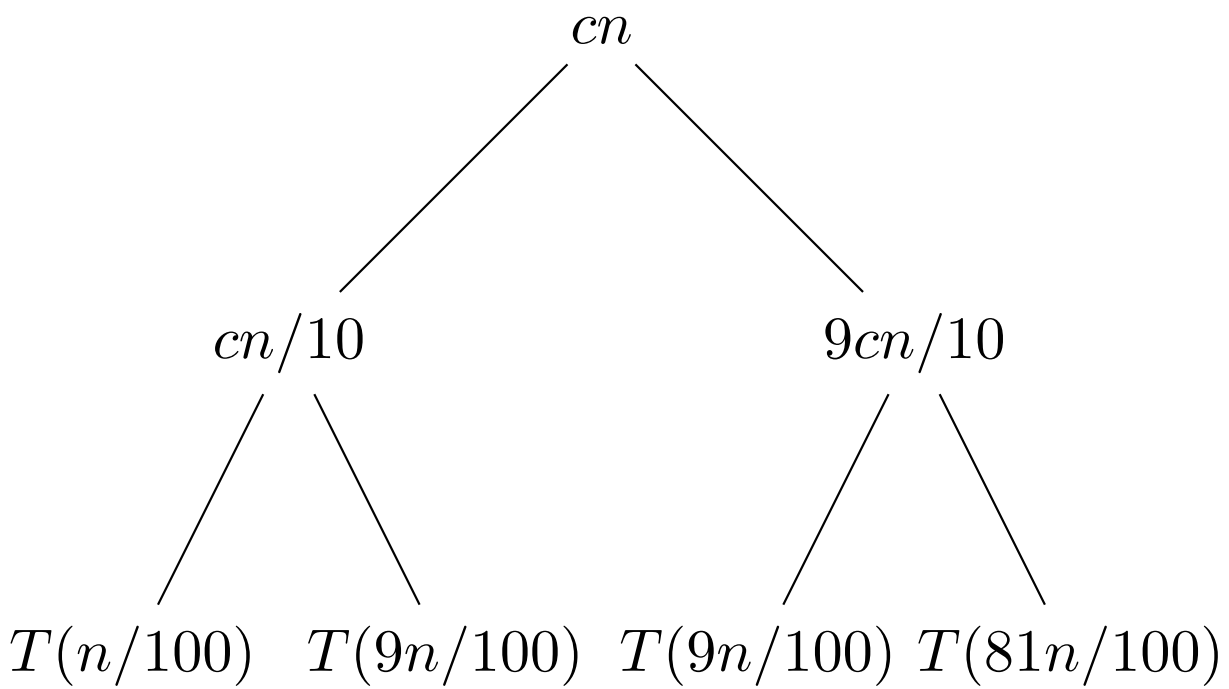
Drevesna metoda: primer

$$T(n) = cn + T(n/10) + T(9n/10)$$



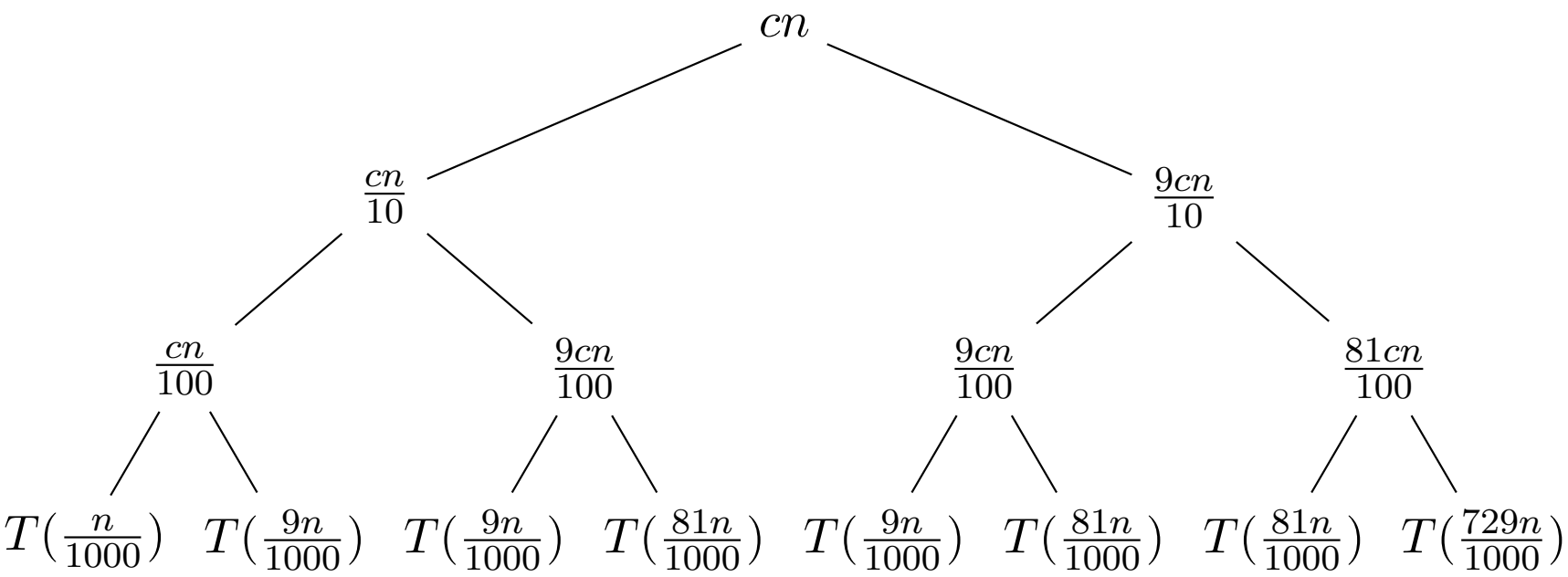
Drevesna metoda: primer

$$T(n/10) = cn/10 + T(n/100) + T(9n/100)$$
$$T(9n/10) = 9cn/10 + T(9n/100) + T(81n/100)$$

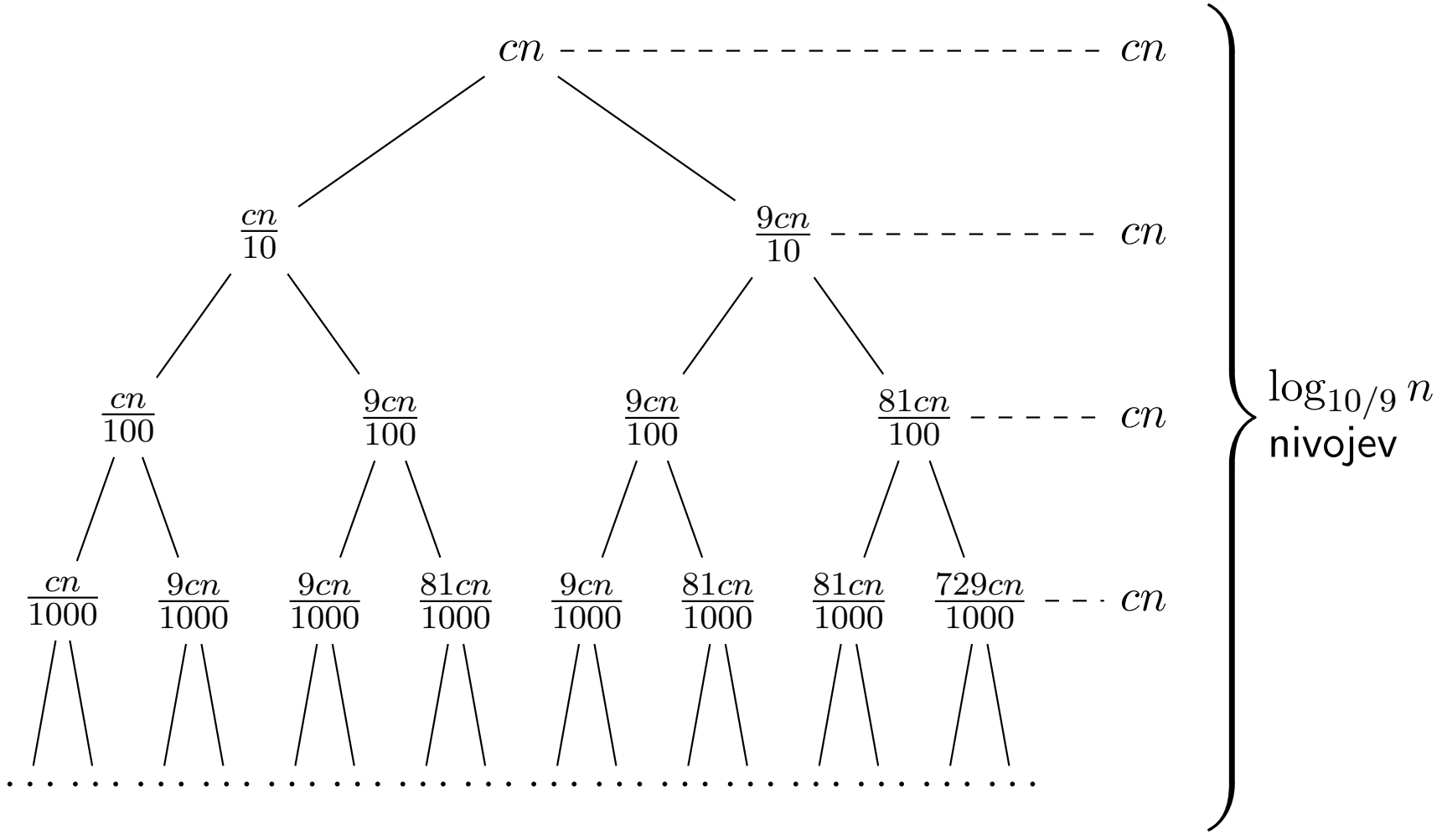


Drevesna metoda: primer

$$T(n/100) = cn/100 + T(n/1000) + T(9n/1000)$$
$$T(9n/100) = 9cn/100 + T(9n/1000) + T(81n/1000)$$
$$T(81n/100) = 81cn/100 + T(81n/1000) + T(729n/1000)$$



Drevesna metoda: primer



Drevesna metoda: primer

- $T(n) = T(n/10) + T(9n/10) + \Theta(n)$
- Hipoteza

$$T(n) = O(cn \log_{10/9} n) = O(n \log n)$$

- Hipotezo preverimo s substitucijsko metodo
- $T(n) \leq cn \log n$ za $n \geq n_0$
- Predpostavimo, da to velja za vse $n' < n$

Drevesna metoda: primer

$$
\begin{aligned}
T(n) &= T(n/10) + T(9n/10) + \Theta(n) \\
&\leq \frac{cn}{10}\log\frac{n}{10} + \frac{9cn}{10}\log\frac{9n}{10} + \Theta(n) \\
&= \frac{cn}{10}\log n - \frac{cn}{10}\log 10 + \frac{9cn}{10}\log n - \frac{9cn}{10}\log\frac{10}{9} + \Theta(n) \\
&= cn\log n - cn\left(\frac{\log 10}{10} + \frac{\log 10/9}{10/9}\right) + \Theta(n)
\end{aligned}
$$

- $T(n) \leq cn\log n$, če ustrezno izberemo c

Krovni izrek

Rekurenčna enačba

$$T(n) = aT(n/b) + \Theta(n^d)$$

ima rešitev

$$T(n) = \begin{cases} \Theta(n^d), & \text{če } a < b^d; \\ \Theta(n^d \log n), & \text{če } a = b^d; \\ \Theta(n^{\log_b a}), & \text{če } a > b^d. \end{cases}$$

(Približen) dokaz

Rekurenčno enačbo $T(n) = aT(n/b) + \Theta(n^d)$ zapišimo kot $T(n) = kn^d + aT(n/b)$ in jo vstavljajmo samo vase:

$$
\begin{aligned}
T(n) &= kn^d + aT(n/b) \\
&= kn^d + ak(n/b)^d + a^2T(n/b^2) \\
&= kn^d + ak(n/b)^d + a^2k(n/b^2)^d + a^3T(n/b^3) \\
&= kn^d + ak(n/b)^d + a^2k(n/b^2)^d + a^3k(n/b^3)^d + a^4T(n/b^4) \\
&= \dots \\
&= \underbrace{kn^d + ak(n/b)^d + a^2k(n/b^2)^d + a^3k(n/b^3)^d + a^4k(n/b^4)^d + \dots}_{(\log_b n + 1) \text{ členov}} \\
&= kn^d \left(\underbrace{1 + \frac{a}{b^d} + \left(\frac{a}{b^d}\right)^2 + \left(\frac{a}{b^d}\right)^3 + \left(\frac{a}{b^d}\right)^4 + \dots}_{(\log_b n + 1) \text{ členov}} \right)
\end{aligned}
$$

(Približen) dokaz

- Dobimo vsoto

$$T(n) = kn^d \sum_{i=0}^{\log_b n} \left(\frac{a}{b^d}\right)^i$$

- Možnost 1: $a < b^d$

$$\begin{aligned} T(n) &\approx kn^d \sum_{i=0}^{\infty} \left(\frac{a}{b^d}\right)^i \\ &= kn^d \frac{1}{1 - \frac{a}{b^d}} \\ &= Ckn^d \\ &= \Theta(n^d) \end{aligned}$$

(Približen) dokaz

- Možnost 2: $a = b^d$

$$\begin{aligned} T(n) &= kn^d \sum_{i=0}^{\log_b n} \left(\frac{a}{b^d}\right)^i \\ &= kn^d(\log_b n + 1) \\ &= \Theta(n^d \log n) \end{aligned}$$

(Približen) dokaz

- Možnost 3: $a > b^d$

$$
\begin{aligned}
T(n) &= kn^d \sum_{i=0}^{\log_b n} \left(\frac{a}{b^d}\right)^i \\
&= kn^d \frac{\left(\frac{a}{b^d}\right)^{\log_b n+1} - 1}{\frac{a}{b^d} - 1} \\
&= \Theta\left(n^d \left(\frac{a}{b^d}\right)^{\log_b n}\right) \\
&= \Theta\left(n^d \frac{a^{\log_b n}}{(b^{\log_b n})^d}\right) \\
&= \Theta\left(n^d \frac{a^{\log_b n}}{n^d}\right) \\
&= \Theta(a^{\log_b n}) \\
&= \Theta(n^{\log_b a})
\end{aligned}
$$

Krovni izrek: primeri uporabe

- Urejanje z zlivanjem
  - $T(n) = 2T(n/2) + \Theta(n)$
  - $a = 2,\ b = 2,\ d = 1$
  - $a = b^d$
  - $T(n) = \Theta(n^d \log n) = \Theta(n \log n)$
- Dvojiško iskanje
  - $T(n) = T(n/2) + \Theta(1)$
  - $a = 1,\ b = 2,\ d = 0$
  - $a = b^d$
  - $T(n) = \Theta(n^d \log n) = \Theta(\log n)$

Množenje matrik

- Matriki A in B velikosti $n \times n$
- Rezultat: matrika $C = AB$ velikosti $n \times n$
- Brez izgube splošnosti lahko predpostavimo $n = 2^k$
  - če to ne drži, lahko matriko dopolnimo z ničlami
- $\Omega(n^2)$
  - napolniti moramo n^2 elementov
- $O(n^3)$
  - $O(n)$ za vsakega od n^2 elementov
  - $c_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} b_{kj}$

Množenje matrik

- Matriki lahko množimo po blokih

$$A = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} \\ B_{21} & B_{22} \end{bmatrix} \quad C = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} \\ C_{21} & C_{22} \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} C_{11} &= A_{11}B_{11} + A_{12}B_{21} \\ C_{12} &= A_{11}B_{12} + A_{12}B_{22} \\ C_{21} &= A_{21}B_{11} + A_{22}B_{21} \\ C_{22} &= A_{21}B_{12} + A_{22}B_{22} \end{aligned}$$

Množenje matrik

- Namesto enega zmnožka matrik $n \times n$ dobimo 8 zmnožkov matrik $n/2 \times n/2$
- Za razbitje matrike na podmatrike in združevanje zmnožkov podmatrik v zmnožek originalnih matrik potrebujemo $\Theta(n^2)$ časa
  - 4 vsote matrik $n/2 \times n/2$
- $T(n) = 8T(n/2) + \Theta(n^2)$
- $a = 8,\ b = 2,\ d = 2$
- $a > b^d$
- $T(n) = \Theta(n^{\log_b a}) = \Theta(n^3)$
- Rekurzivni razcep sam po sebi ni dovolj!
  - moramo zmanjšati število zmnožkov podmatrik

Množenje matrik po Strassenu

$$
\begin{aligned}
M_1 &= (A_{11} + A_{22})(B_{11} + B_{22}) \\
M_2 &= (A_{21} + A_{22})B_{11} \\
M_3 &= A_{11}(B_{12} - B_{22}) \\
M_4 &= A_{22}(B_{21} - B_{11}) \\
M_5 &= (A_{11} + A_{12})B_{22} \\
M_6 &= (A_{21} - A_{11})(B_{11} + B_{12}) \\
M_7 &= (A_{12} - A_{22})(B_{21} + B_{22})
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
C_{11} &= M_1 + M_4 - M_5 + M_7 \\
C_{12} &= M_3 + M_5 \\
C_{21} &= M_2 + M_4 \\
C_{22} &= M_1 - M_2 + M_3 + M_6
\end{aligned}
$$

Množenje matrik po Strassenu

- 7 množenj namesto 8
- več seštevanj (in odštevanj), a to ne vpliva na asimptotično časovno zahtevnost
  - samo pri členu $\Theta(n^2)$ imamo večjo konstanto
- $T(n) = 7T(n/2) + \Theta(n^2)$
- $a = 7$, $b = 2$, $d = 2$
- $a > b^d$
- $T(n) = \Theta(n^{\log_b a}) = \Theta(n^{\log_2 7})$

Množenje matrik po Strassenu

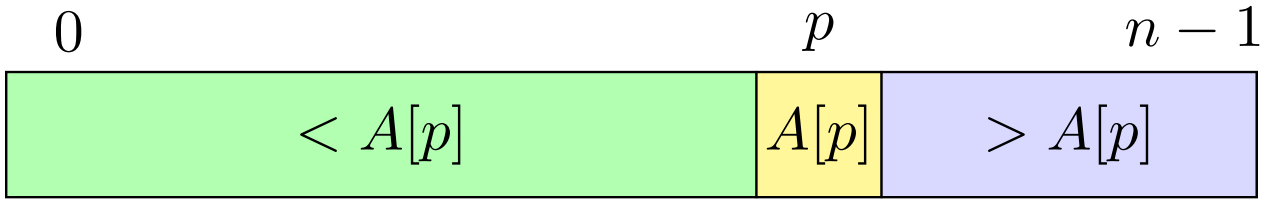
- $\log_2 7 \approx 2{,}81$ se ne zdi veliko manj kot 3
- Se Strassen sploh splača?
- Da,
  - če sta matriki dovolj veliki (npr. $n \geq 256$)
  - če rekurzijo odrežemo pri, recimo, $n = 64$
  - če drugo matriko transponiramo
    - velja tudi za navadno množenje!

Hitro iskanje (quickselect)

- Problem
  - V podani tabeli z n medsebojno različnimi elementi poišči element na rangu k
  - (tj. $(k+1)$-vi najmanjši element)
- Rešljiv v času $O(n \log n)$
  - Uredi elemente
  - Iskani element najdemo na indeksu k
- Obstaja rešitev v času $\Theta(n)$

Hitro iskanje (quickselect)

- Izberemo pivot in izvedemo porazdelitev (kot pri hitrem urejanju)
- Po porazdelitvi pivot pristane na indeksu p



- Če je $k = p$, je iskani element kar pivot!
- Če je $k < p$, se iskani element nahaja v levem delu tabele
- Če je $k > p$, se iskani element nahaja v desnem delu tabele

Hitro iskanje

```
function HITRO-ISKANJE(A, k)
    return HITRO-ISKANJE(A, k, 0, |A| − 1)

function HITRO-ISKANJE(A, k, l, d)
    m ← IZBERI-PIVOT(A, l, d)                ▷ vrne indeks pivota
    med seboj zamenjaj A[m] in A[d]
    p ← PORAZDELI(A, l, d)                   ▷ kot pri hitrem urejanju
    if p = k then
        return A[p]
    else if p < k then
        return HITRO-ISKANJE(A, k, p + 1, d)
    else
        return HITRO-ISKANJE(A, k, l, p − 1)
```

Hitro iskanje

```
function PORAZDELI(A, l, d)
    pivot ← A[d]
    i ← l − 1
    for j ← l : d − 1 do
        if A[j] ≤ pivot then
            i ← i + 1
            med seboj zamenjaj A[i] in A[j]
    med seboj zamenjaj A[i + 1] in A[d]
    return i + 1
```

Hitro iskanje v »povprečnem« primeru

- Aktivni del tabele vsakokrat zmanjšamo za polovico
- Porazdelitev zahteva $\Theta(n)$ časa
- $T(n) = T(n/2) + \Theta(n)$
- $a = 1$, $b = 2$, $d = 1$
- $a < b^d$
- $T(n) = \Theta(n^d) = \Theta(n)$

Hitro iskanje v precej neugodnem primeru

- Aktivni del tabele vsakokrat zmanjšamo za desetino
- $T(n) = T(9n/10) + \Theta(n)$
- $a = 1$, $b = 10/9$, $d = 1$
- $a < b^d$
- $T(n) = \Theta(n^d) = \Theta(n)$

Hitro iskanje v najslabšem primeru

- Aktivni del tabele vsakokrat zmanjšamo za en element
- $T(n) = T(n-1) + \Theta(n)$
- Z drevesno metodo dobimo $T(n) = \Theta(n^2)$
- Preverimo $O(.)$
  - Hipoteza: $T(n) \leq cn^2$ za $n \geq n_0$
  - $T(n) \leq c(n-1)^2 + \Theta(n) = cn^2 - 2cn + c + \Theta(n)$
  - OK, če je c dovolj velik
- Preverimo $\Omega(.)$
  - Hipoteza: $T(n) \geq cn^2$ za $n \geq n_0$
  - $T(n) \geq c(n-1)^2 + \Theta(n) = cn^2 - 2cn + c + \Theta(n)$
  - OK, če je c dovolj majhen

Hitro iskanje

- Lahko zagotovimo $O(n)$ tudi v najslabšem primeru?
- V praksi pomaga randomizacija
  - naključna izbira pivota
  - še bolje je naključno izbrati npr. tri elemente in za pivot izbrati njihovo mediano
- Teoretičnega zagotovila za $O(n)$ pa še vedno nimamo
  - teoretično bi se nam lahko zgodilo, da bi kljub randomizaciji vedno izbrali ravno tri najmanjše elemente
- Obstaja pa zanimiv (četudi v praksi neuporaben) algoritem izbire pivota, ki tudi v praksi zagotavlja $O(n)$

Izbira pivota z mediano median

1. Tabelo razdeli na skupine po 5 zaporednih elementov.
2. Za vsako skupino izračunaj mediano.
3. Izračunaj mediano dobljenih median.
4. Dobljena mediana služi kot pivot.
5. Nadaljuj s postopkom hitrega iskanja (izvedi porazdelitev itd.).

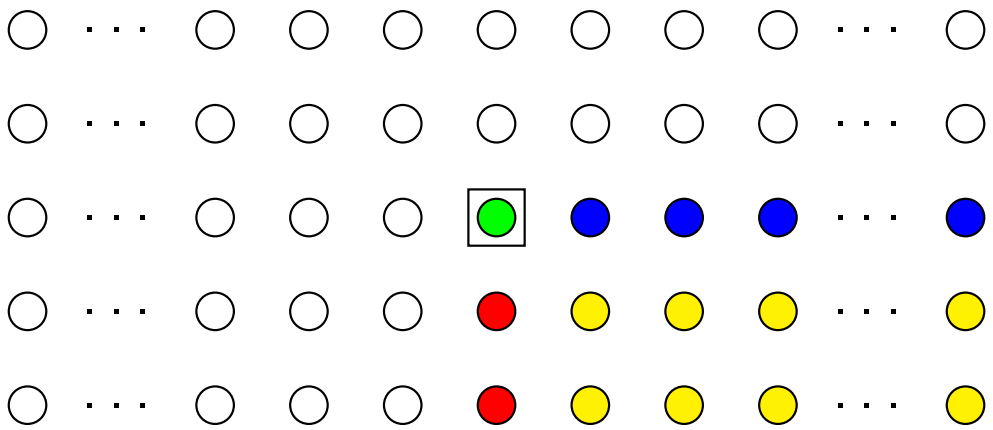
Izbira pivota z mediano median

1. Tabelo razdeli na skupine po 5 zaporednih elementov.
   - $\Theta(n)$
2. Za vsako skupino izračunaj mediano.
   - $\Theta(n)$
3. Izračunaj mediano dobljenih median.
   - hitro iskanje na tabeli velikosti $n/5$
   - $T(n/5)$
4. Dobljena mediana služi kot pivot.
5. Nadaljuj s postopkom hitrega iskanja (izvedi porazdelitev itd.).

- Kako dobra bo porazdelitev s tako izbranim pivotom v najslabšem primeru?

Izbira pivota z mediano median

- Brez vpliva na rezultat lahko predpostavimo, da so
  - elementi v posameznih skupinah urejeni naraščajoče
  - skupine urejene po naraščajočih medianah



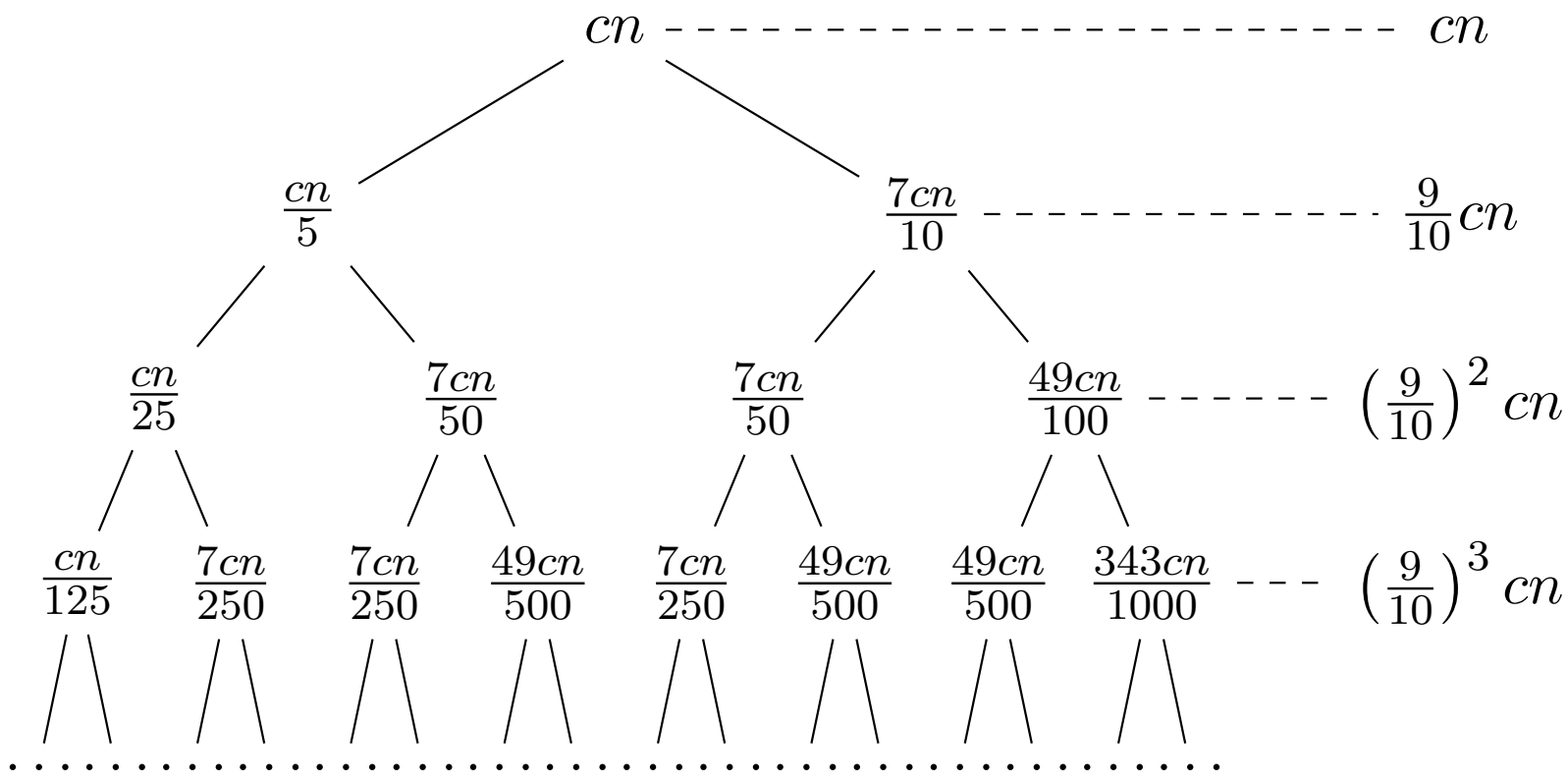
- Pivot je gotovo manjši od modrih, rumenih in rdečih elementov
- Teh elementov je vsaj $\frac{3}{5}$ od $\frac{1}{2}n = 3n/10$
- Ostalih elementov je kvečjemu $7n/10$
- Pivot, izbran kot mediana median, bo tabelo razdelil v razmerju med 3:7 in 7:3.

Izbira pivota z mediano median

1. Tabelo razdeli na skupine po 5 zaporednih elementov.
   - $\Theta(n)$
2. Za vsako skupino izračunaj mediano.
   - $\Theta(n)$
3. Izračunaj mediano dobljenih median.
   - hitro iskanje na tabeli velikosti $n/5$
   - $T(n/5)$
4. Dobljena mediana služi kot pivot.
5. Nadaljuj s postopkom hitrega iskanja (izvedi porazdelitev itd.)
   - $T(7n/10)$ v najslabšem primeru

Izbira pivota z mediano median

- $T(n) = T(n/5) + T(7n/10) + \Theta(n)$
- Poskusimo z drevesno metodo
- Zapišimo $T(n) = cn + T(n/5) + T(7n/10)$



Izbira pivota z mediano median

$$
\begin{aligned}
T(n) &= cn\left(1 + \frac{9}{10} + \left(\frac{9}{10}\right)^2 + \left(\frac{9}{10}\right)^3 + \ldots\right) \\
&\leq cn\sum_{i=1}^{\infty}\left(\frac{9}{10}\right)^i \\
&= cn\frac{1}{1-\frac{9}{10}} \\
&= 10cn \\
&= \Theta(n)
\end{aligned}
$$

- Trditev $T(n) = O(n)$ preizkusimo s substitucijsko metodo

Izbira pivota z mediano median

- $T(n) = T(n/5) + 7T(n/10) + \Theta(n)$
- Hipoteza: $T(n) \leq cn$

$$\begin{aligned} T(n) &\leq cn/5 + 7cn/10 + \Theta(n) \\ &= 9cn/10 + \Theta(n) \\ &= cn - cn/10 + \Theta(n) \end{aligned}$$

  $T(n) \leq cn$ za vse dovolj velike c
- Trditev $T(n) = O(n)$ je torej resnična
- Če pivot izberemo kot mediano median, bo hitro iskanje tudi v najslabšem možnem primeru teklo v času $O(n)$, a za ceno ogromnega konstantnega faktorja