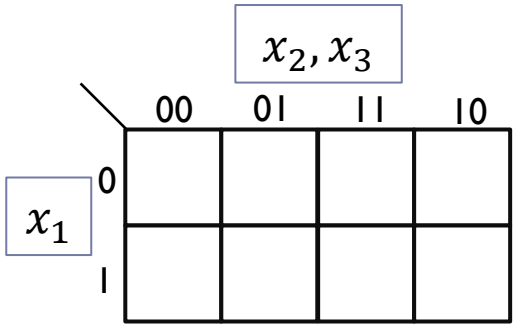
# Digitalna vezja
# UL, FRI

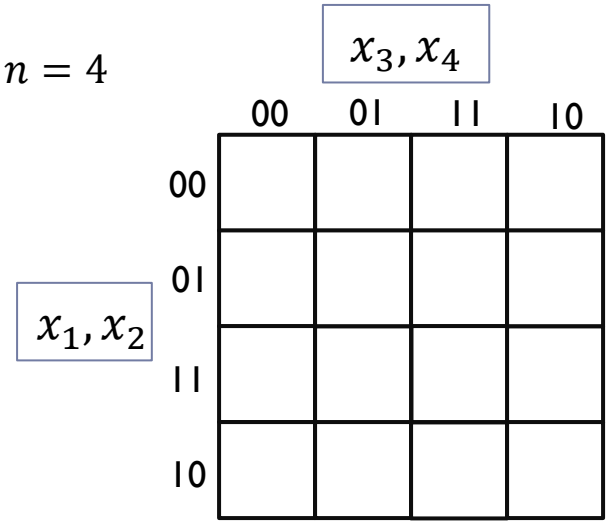
Vaja 4 Karnaughjev diagram, Grayeva koda, Minimizacija

# Karnaughjevi diagrami (K-map)

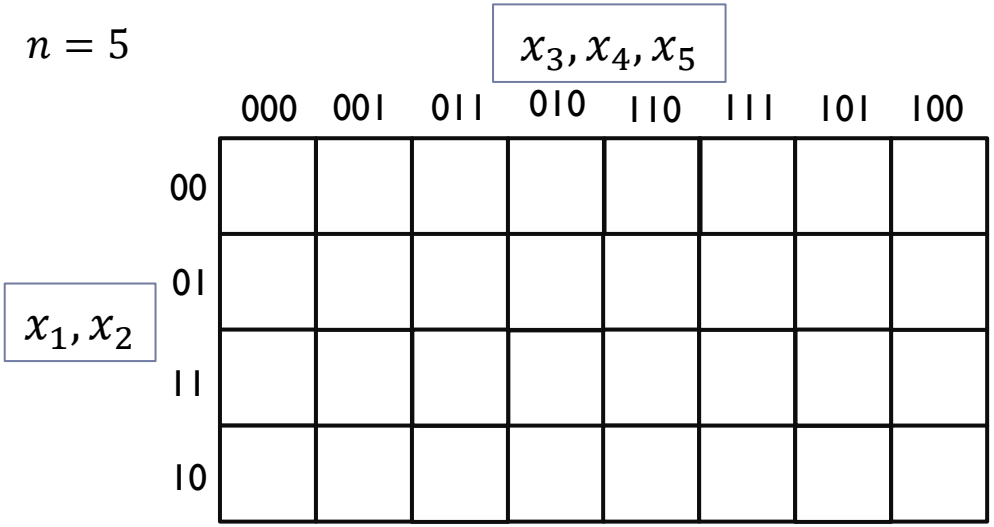
$n = 3$




$n = 4$



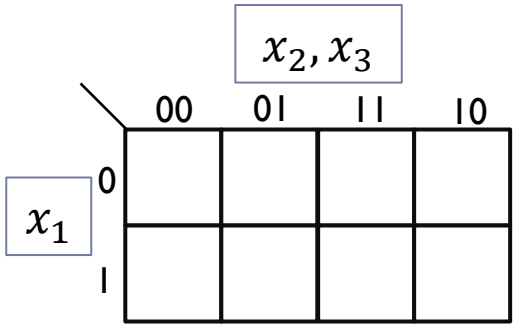

$n = 5$



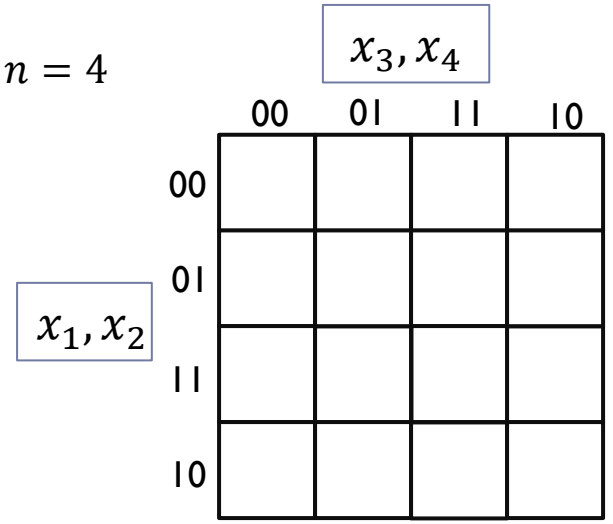

Sosednost se nanaša na sosednost med polji.

# Karnaughjevi diagrami (K-map)

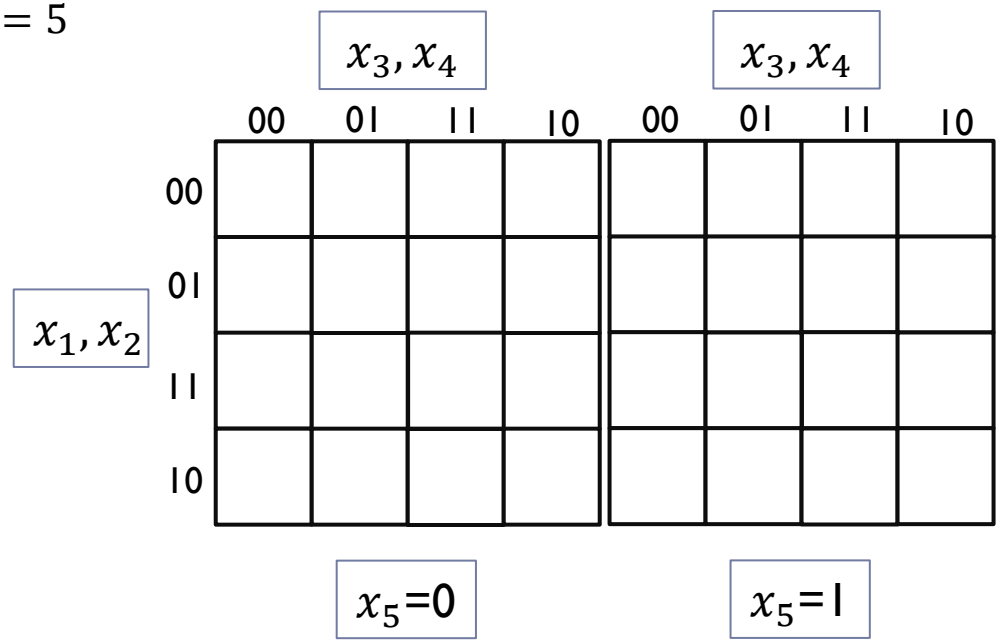
$n = 3$




$n = 4$




$n = 5$




Sosednost se nanaša na sosednost med polji.

# Grayeva koda (zapis iz binarne kode)

- Vsaka naslednja koda se od prejšnje razlikuje samo na enem mestu za eno negacijo.
- Določanje Grayeve kode iz dvojiške kode.

## n=1 (1- bitna Grayeva koda)

$g_0 = b_0$

| $b_0$ | $g_0$ |
|---|---|
| 0 | 0 |
| 1 | 1 |

## n=2 (2- bitna Grayeva koda)

a)
$g_1 = b_1$

b)
zgornja polovica za $g_0$ je enaka $g_0$ za $n = 1$

c)
spodnja polovica za $g_0$ je navzdol prepognjena $g_0$

| | $b_1$ | $b_0$ | $g_1$ | $g_0$ |
|---|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 0 | 0 | |
| 1 | 0 | 1 | 0 | |
| 2 | 1 | 0 | 1 | |
| 3 | 1 | 1 | 1 | |

| | $b_1$ | $b_0$ | $g_1$ | $g_0$ |
|---|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 1 | 0 | 1 | 0 | 1 |
| 2 | 1 | 0 | 1 | |
| 3 | 1 | 1 | 1 | |

| | $b_1$ | $b_0$ | $g_1$ | $g_0$ |
|---|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 1 | 0 | 1 | 0 | 1 |
| 2 | 1 | 0 | 1 | 1 |
| 3 | 1 | 1 | 1 | 0 |

# n=3 (3- bitna Grayeva koda)

| $g_1$ | $g_0$ |
|---|---|
| 0 | 0 |
| 0 | 1 |
| 1 | 1 |
| 1 | 0 |

a) $g_2 = b_2$

| | $b_2$ | $b_1$ | $b_0$ | $g_2$ | $g_1$ | $g_0$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | | |
| 1 | 0 | 0 | 1 | 0 | | |
| 2 | 0 | 1 | 0 | 0 | | |
| 3 | 0 | 1 | 1 | 0 | | |
| 4 | 1 | 0 | 0 | 1 | | |
| 5 | 1 | 0 | 1 | 1 | | |
| 6 | 1 | 1 | 0 | 1 | | |
| 7 | 1 | 1 | 1 | 1 | | |

b)
zgornja polovica za $g_1 g_0$ je enaka $g_1 g_0$ za $n = 2$

| | $b_2$ | $b_1$ | $b_0$ | $g_2$ | $g_1$ | $g_0$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 1 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 1 |
| 2 | 0 | 1 | 0 | 0 | 1 | 1 |
| 3 | 0 | 1 | 1 | 0 | 1 | 0 |
| 4 | 1 | 0 | 0 | 1 | | |
| 5 | 1 | 0 | 1 | 1 | | |
| 6 | 1 | 1 | 0 | 1 | | |
| 7 | 1 | 1 | 1 | 1 | | |

c)
spodnja polovica sta navzdol prepognjeni $g_1 g_0$

| | $b_2$ | $b_1$ | $b_0$ | $g_2$ | $g_1$ | $g_0$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 1 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 1 |
| 2 | 0 | 1 | 0 | 0 | 1 | 1 |
| 3 | 0 | 1 | 1 | 0 | 1 | 0 |
| 4 | 1 | 0 | 0 | 1 | 1 | 0 |
| 5 | 1 | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| 6 | 1 | 1 | 0 | 1 | 0 | 1 |
| 7 | 1 | 1 | 1 | 1 | 0 | 0 |

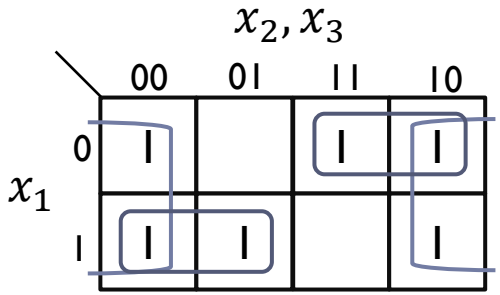
# Minimizacija preklopnih funkcij

- Zapis MDNO (minimalna disjunktivna normalna oblika). Postopek vključuje:
  1. Vpis preklopne funkcije v Karnaughjev diagram.
  2. Združevanje funkcijskih vrednosti 1 po pravilu sosednosti v krajše konjunkcije (glavni vsebovalniki) tako, da je vsaka enica upoštevana vsaj enkrat, lahko je tudi večkrat.
  3. Iščemo najmanjši nabor pokritij, da dobimo potrebne glavne vsebovalnike.
  4. MDNO je disjunktivna povezava potrebnih glavnih vsebovalnikov.
- Zapis MKNO (minimalna konjunktivno normalna oblika). Postopek vključuje:
  1. Preklopno funkcijo negiramo in vpišemo v Karnaughjev diagram.
  2. Določimo MDNO negirane funkcije.
  3. MDNO negirane funkcije še enkrat negiramo in dobimo MKNO izhodiščne funkcije.
- Zapis MNO (minimalna konjunktivno normalna oblika). Postopek vključuje:
  1. Določimo MDNO.
  2. Določimo MKNO.
  3. Določimo kompleksnost MDNO in MKNO (število operatorjev, število vhodov).
  4. MNO je tista, ki ima manjše število operatorjev; če je število operatorjev enako, je MNO tista, ki ima manjše število vhodov.

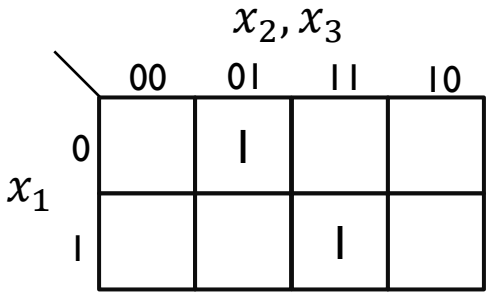
# Primer 1: Minimizacija preklopne funkcije

- Primer:

| i | $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ | $f_A$ |
|---|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 0 | 0 | 1 |
| 1 | 0 | 0 | 1 | 0 |
| 2 | 0 | 1 | 0 | 1 |
| 3 | 0 | 1 | 1 | 1 |
| 4 | 1 | 0 | 0 | 1 |
| 5 | 1 | 0 | 1 | 1 |
| 6 | 1 | 1 | 0 | 1 |
| 7 | 1 | 1 | 1 | 0 |




$$f_A = \overline{x_3} \vee \overline{x_1}.x_2 \vee x_1.\overline{x_2}$$




$$\overline{f_A} = \overline{x_1}.\overline{x_2}.x_3 \vee x_1.x_2.x_3$$

$$\overline{\overline{f_A}} = \overline{\overline{x_1}.\overline{x_2}.x_3 \vee x_1.x_2.x_3} =$$
$$f_A = (x_1 \vee x_2 \vee \overline{x_3}).(\overline{x_1} \vee \overline{x_2} \vee \overline{x_3})$$

MDNO: $f_A = \overline{x_3} \vee \overline{x_1}.x_2 \vee x_1.\overline{x_2}$ (3, 7)
MKNO: $f_A = (x_1 \vee x_2 \vee \overline{x_3}).(\overline{x_1} \vee \overline{x_2} \vee \overline{x_3})$ (3, 8)

MNO = MDNO (obe obliki imata enako število vrat, a MDNO ima manj vhodov)

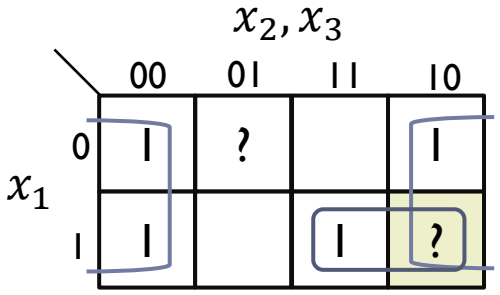
# Primer 2: Minimizacija nepopolne preklopne funkcije

- Določeni vhodni vektorji nimajo določene funkcijske vrednosti

  (Don‘t care: ? ali X)

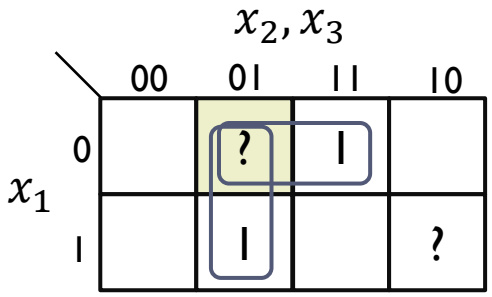
- Glavne vsebovalnike določimo tako, da jih lahko pokrijemo, to je postavimo na 1 ali pa ne in jih postavimo na 0.
- Določimo čimkrajšo obliko zapisa.

| i | $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ | $f_B$ |
|---|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 0 | 0 | 1 |
| 1 | 0 | 0 | 1 | ? |
| 2 | 0 | 1 | 0 | 1 |
| 3 | 0 | 1 | 1 | 0 |
| 4 | 1 | 0 | 0 | 1 |
| 5 | 1 | 0 | 1 | 0 |
| 6 | 1 | 1 | 0 | ? |
| 7 | 1 | 1 | 1 | 1 |




$f_B = \overline{x_3} \vee x_1 . x_2$

MDNO: (2, 4)




$\overline{f_B} = \overline{x_1} . x_3 \vee \overline{x_2} . x_3$

$\overline{\overline{f_B}} = \overline{\overline{x_1} . x_3 \vee \overline{x_2} . x_3} =$

$f_B = (x_1 \vee \overline{x_3}) . (x_2 \vee \overline{x_3})$

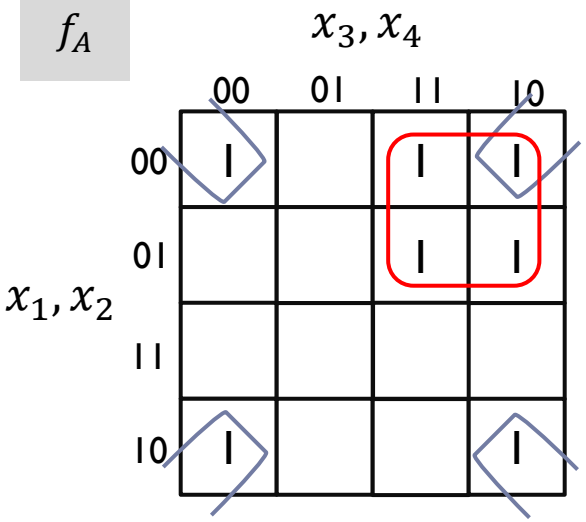
MKNO: (3, 6)

MNO = MDNO

# Primer 3: MDNO preklopnih funkcij ($n = 4$)

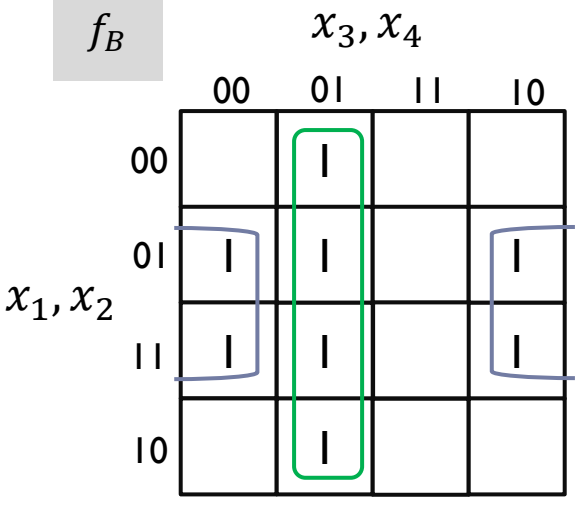
- V Karnaughjevem diagramu sta podani logični funkciji:
  - $f_A(x_1, x_2, x_3, x_4) = \mathrm{V}^4\,(0, 2, 3, 6, 7, 8, 10)$
  - $f_B(x_1, x_2, x_3, x_4) = \mathrm{V}^4\,(1, 4, 5, 6, 9, 12, 13, 14)$
- Zapišite MDNO.

$f_A$

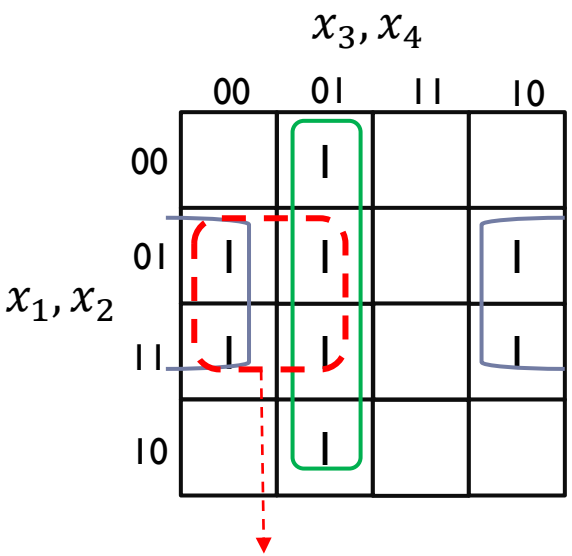



$f_A = \overline{x_2}.\overline{x_4}\ \mathrm{V}\ \overline{x_1}.x_3$

$f_B$




$f_B = \overline{x_3}.x_4\ \mathrm{V}\ x_2.\overline{x_4}$




Za funkcijo $f_B$ obstaja glavni vsebovalnik $x_2.\overline{x_3}$, ki ni potreben, ker so vse funkcijske vrednosti 1 že upoštevane v drugih dveh.

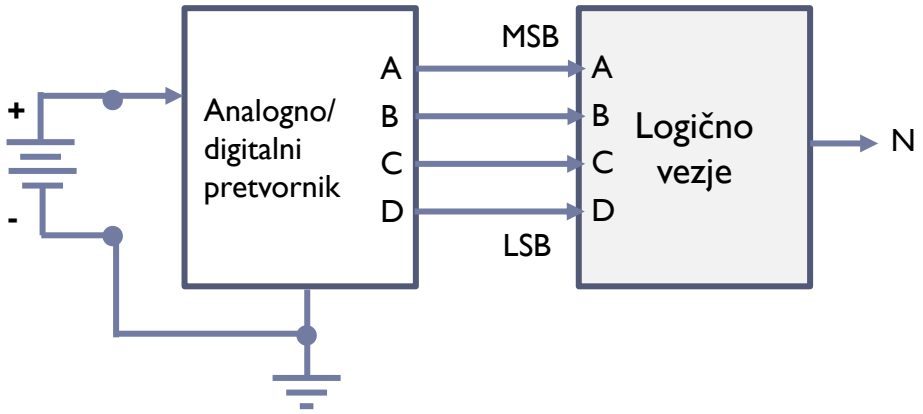
# Naloge

- Za podano funkcijo $f(x_1, x_2, x_3, x_4) = \mathrm{V}^4\,(0, 1, 4, 5, 11, 15)$ določite MNO s pomočjo Karnaugherjevega diagrama.

- Izdelati želite logično vezje za določanje napetostnega nivoja 12-V pomnilniške baterije. Enosmerno napetost baterije preko analogno-digitalni pretvornika pretvorite v 4-bitno binarno število (ABCD), ki ustreza napetosti s korakom 1 V, pri čemer je izhod A najbolj pomemben bit. Binarni izhodi pretvornika nato pripeljemo na logično vezje, ki vrne vrednost 1 (HIGH), kadar je napetost baterije večja od 6 V, sicer na izhodu N dobimo 0 (LOW). Ko binarni izhod preseže napetost baterije, je izhod N nedoločen (?).

Za opisano vezje:

1. Zapišite pravilnostno tabelo
2. Zapišite PDNO v skrajšani obliki
3. Določite MNO
4. MNO realizirajte v logisimu in na protoboardu



# Dodatna naloga: Primerjalnik

- Podane so zahteve za izvedbo dvo-bitnega primerjalnika števil, če so podani:
  - Vhodi: $X = (x_1, x_0),\ Y = (y_1, y_0)$
  - Izhodi:

    $p_1 = 0, p_0 = 0$, če je $X = Y$

    $p_1 = 0, p_0 = 1$, če je $X < Y$

    $p_1 = 1, p_0 = 0$, če je $X > Y$
- Naloge:
  1. Funkciji $p_1$ in $p_0$ zapišite v pravilnostno tabelo.
  2. Funkciji $p_1$ in $p_0$ zapišite v PDNO in v PKNO v skrajšani obliki
  3. Zapišite MDNO in MKNO za funkciji $p_1$ in $p_0$
  4. Določite MNO (minimalna normalna oblika)
  5. Realizirajte primerjalnik v logisimu